

Vektoranalysis

- Dieses Folienpaket ist ausschließlich als Begleit- und Orientierungsmaterial zu einer Vorlesung zu verstehen, die ansonsten frei gehalten und an der Tafel präsentiert wird.
- Sie ist daher kein geschlossenes Lernmaterial und eignet sich nur für die Hörer der Vorlesung im Zusammenhang mit den eigenen Mitschriften.
- Dennoch ist es nicht gestattet, das Material für eigene Vorlesungen und Vorträge zu verwenden!

Vektoranalysis in der Elektrotechnik

Inhalte:

1. Motivation
2. Anwendungen in der Elektrotechnik
3. Voraussetzungen
4. Skalar- und Vektorfelder
5. Differenzialoperatoren, grad, div und rot
6. Quellen und Wirbel
7. Linien-, Flächen- und Volumenintegrale
8. Raumkurven, Flächen, Volumina
9. Differenzielles Wegelement, differenzielles Flächenelement
10. Integralsätze von Gauß und Stoke

Anwendungen in der Elektrotechnik:

- Beschreibung von räumlich und zeitlich abhängigen elektrischen Größen
- Ermittlung der Wechselwirkungen zwischen verschiedenen elektrischen Größen
- Vereinfachung der Darstellung raum- und zeitvarianter Größen
- Ermittlung der funktionalen Abhängigkeit von Zeit und Raum

Einen wichtigen Sonderfall stellen die zeitinvarianten Größen dar, die nur im Raum verteilt sind

Beispiele:

E -, **D** -, **J** - und φ -Darstellung des stationären elektrischen Feldes.

H -Darstellung des stationären magnetischen Feldes.

Anwendungen in der Elektrotechnik:

Gesetzmäßigkeiten als Beispiele:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} E(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Potenzial des stationären elektrischen Feldes

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = I \cdot w$$

Durchflutungsgesetz

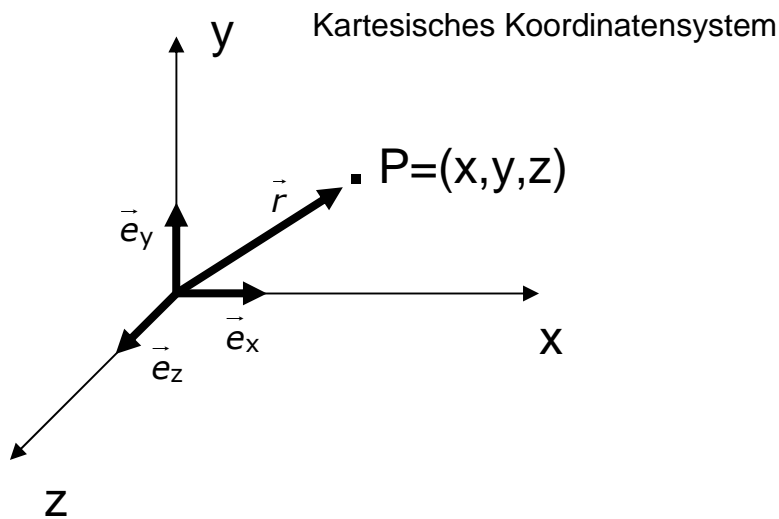
$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{(\vec{r} - \vec{r}')^3}$$

Biot-Savart'sches Gesetz

$$\varphi = \int_{(A)} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Magnetischer Fluss

Voraussetzungen



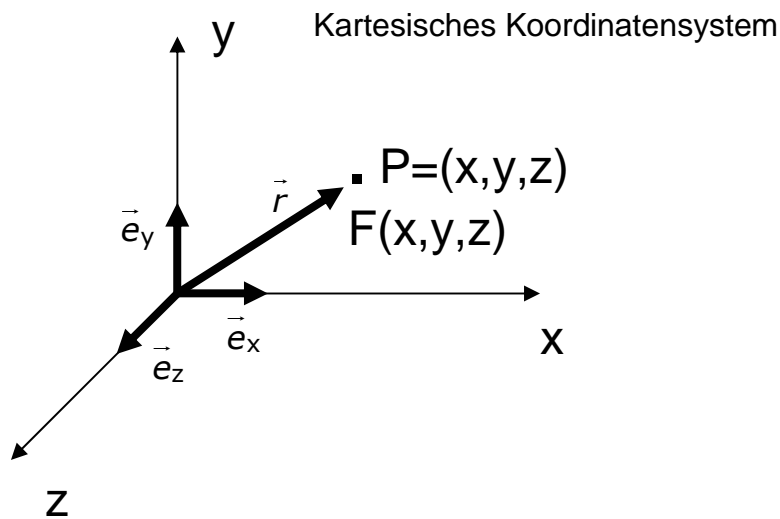
Koordinate = Ortsangabe eines Punktes im Raum = Ortsvektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, y, z)^T = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

z.B. $\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = (5, 4, 1)^T = 5\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 1\vec{e}_z$

Jeder Vektor im Raum lässt sich in drei Anteile, x,y,z zerlegen bzw. durch diese Anteile darstellen!

Skalarfeld



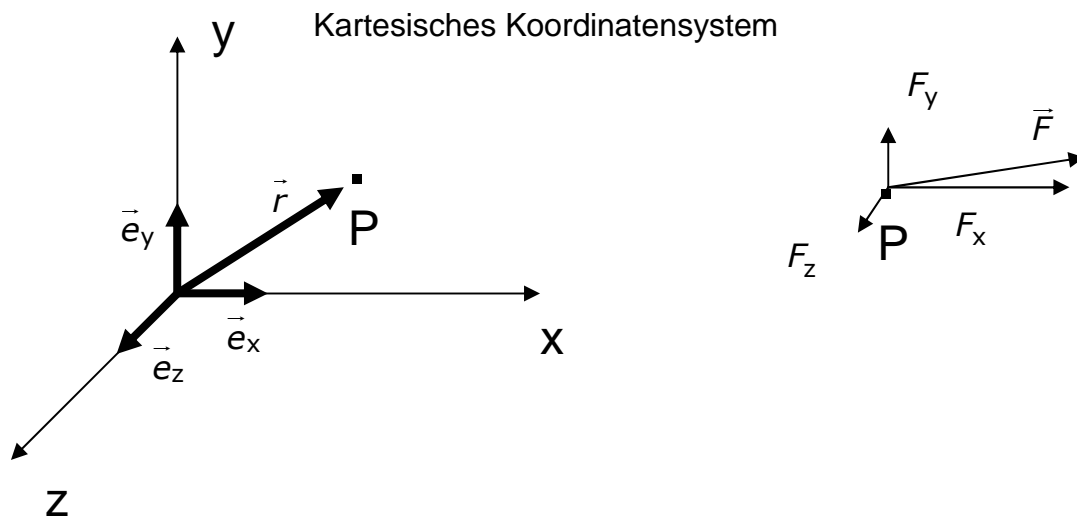
Wird jedem Punkt im Raum eine skalare Größe $F(P)$ (reelle Zahl) zugeordnet, so heißt diese Zuordnung Skalarfeld.

- Temperaturverteilung im Raum**
- Dichteverteilung**
- Potenzial im elektrischen Feld**

Beispiel: Potenzialfeld einer Punktladung Q im materiefreien Raum.

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Vektorfeld



Wird jedem Punkt im Raum eine vektorielle Größe $\vec{F}(P)$ zugeordnet, so heißt diese Zuordnung Vektorfeld.

- Gravitationsfeld (Kraftfeld)
- Das Feld der elektrischen Feldstärke
- Das Feld der magnetischen Flussdichte
- Geschwindigkeitsfeld einer Strömung

Wichtig: Die vektorielle Größe kann wiederum in ihre drei Komponenten zerlegt werden.

$$\vec{F} = F_x(x, y, z)\vec{e}_x + F_y(x, y, z)\vec{e}_y + F_z(x, y, z)\vec{e}_z =$$

$$\left[F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z) \right]^T = \begin{pmatrix} F_x(x, y, z) \\ F_y(x, y, z) \\ F_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Beispiel : Das elektrische Feldstärkefeld einer Punktladung im materiefreien Raum.

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)$$

Die Feldstärke besitzt die gleiche Richtung wie der Ortsvektor!

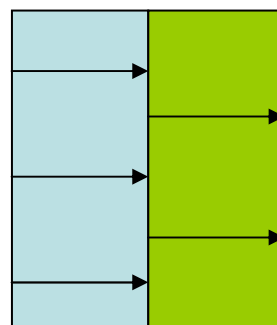
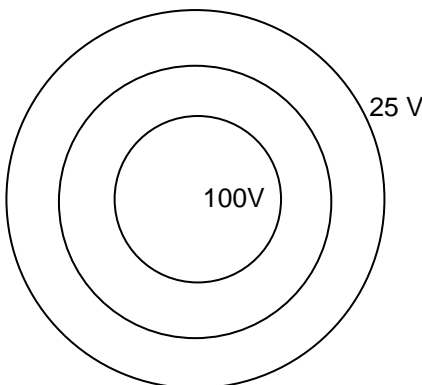
Skalarfeld und Vektorfeld

Fazit:

- Die Beschreibung eines Vektorfeldes ist meist umständlicher lässt sich aber oft nicht vermeiden
- Im Falle des stationären elektrischen Feldes sind aber offensichtlich zwei Darstellungen möglich.
- Obwohl das Feld der Punktladung in beiden Darstellungen das gleiche ist, ist die Beschreibung mittels Potenzial einfacher und daher zu bevorzugen.
- Die Möglichkeit der Vereinfachung ist die Folge innerer Gesetzmäßigkeiten auf die wir noch näher eingehen.

-Darstellung:

- Es gibt verschiedene Darstellungsformen für die Felder, üblich sind Linien, Pfeile, Farbverläufe und Höhenlinien
- (nur bei ebenen Feldern)
- Bei skalaren Felder verbindet man oft Punkte gleicher Größe, beim elektrischen Feld heißen die dann Äquipotenziallinien.
- Bei vektoriellen Feldern folgt man oft der Richtung der Vektoren ausgehend von einem Punkt und erhält so die Feldlinien. Diese geben jedoch zunächst nur die Richtung an, nicht die Stärke. Deshalb wählt man in Bereichen größerer Stärke ein höhere Liniendichte als für Bereiche geringerer Stärke.



$$E_1 > E_2$$

Die Differenzialoperatoren

Notwendigkeit:

- Differenzialoperatoren dienen der Analyse von skalaren oder vektoriellen Feldern.**
- Sie können Felder umformen (Gradient) oder Felder auf bestimmte Eigenschaften untersuchen (Divergenz, Rotation)**

Der Gradient

- Der Gradient kann auf ein Skalarfeld angewendet werden
- Er gibt die „Änderungsrate“ und die Richtung der größten Änderung in einem Skalarfeld vor.
- Er ist definiert als der Vektor der partiellen Ableitungen

-Für ein Skalarfeld $\varphi(x,y,z)$ gilt demnach:

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^T$$

$$\text{Nablasymbol } \nabla \text{ steht für: } \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

-**Beispiel: Gesucht ist der Gradient des Potenzialfeldes von Bild 6**

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\text{grad } \varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_x - \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_y - \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z \right) =$$

$$-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) = -\vec{E}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi$$

Aus dem elektrischen Potenzialfeld lässt sich mittels Gradient das Feldstärkefeld ableiten!

Die Divergenz

- Die Divergenz stellt ein Funktional eines Vektorfeldes dar und ist im Ergebnis wieder ein Skalar.
- Nimmt man z.B. ein Strömungsfeld, so gibt die Divergenz an, ob ein Teilchen in einem Punkt weg oder zufließt.
- Ist die Divergenz in diesem Punkt > 0 so liegt eine Quelle vor, ist sie < 0 so liegt eine Senke vor.
- Ist sie überall gleich null, so nennt man das Feld quellenfrei.

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) \cdot (F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z) =$$
$$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Ist das folgende Strömungsfeld quellenfrei?

$$\vec{v}(x, y, z) = (0, 0, z(1 - x^2 - y^2))^T$$
$$\operatorname{div} \vec{v} = (1 - x^2 - y^2)$$

Antwort: Nein, nur an den Stellen $1 - x^2 - y^2 = 0$

Die Rotation

- Die Rotation versteht man eine bestimmte Funktion eines Vektorfeldes dar und ist im Ergebnis wieder ein Vektor.
- Nimmt man z.B. ein Strömungsfeld, so gibt die Rotation für jeden Ort an, wie schnell und um welche Achse ein mit schwimmendes Teilchen in einem Punkt rotiert.
- Ist die Rotation überall gleich null, so nennt man das Feld wirbelfrei.

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) \times (F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z) =$$
$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Satz:

Die Rotation eines Vektorfeldes ist immer quellenfrei

Ein Vektorfeld ist wirbelfrei, wenn es sich als Gradient eines Skalarfeldes darstellen lässt.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} = 0 & \Leftrightarrow \vec{v} = \operatorname{rot} \vec{w} \\ \operatorname{rot} \vec{v} = 0 & \Leftrightarrow \vec{v} = \operatorname{grad} F \end{aligned}$$

Beispiele

$$\vec{H}(x, y, z) = \frac{k}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\vec{H}| = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = k \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = -k \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$\operatorname{div} \vec{H} = 0$ Feld ist quellenfrei

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = k \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

$\operatorname{rot} \vec{H} = 0$ Feld ist wirbelfrei

$$\vec{v}(x, y, z) = (x^2 + xyz, y^2 - x^2, x + y \sin z)^T$$

$\operatorname{div} \vec{v} = 2x + yz + y + y \cos z$ Feld ist nicht quellenfrei

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + xyz & y^2 - x^2 & x + y \sin z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin z \\ xy - 1 \\ -2x - xz \end{pmatrix} \quad \text{auch nicht wirbelfrei}$$

Kurvenintegrale

Anwendung:

- Bei Kurvenintegralen wird in einem Feld entlang einer Kurve integriert.
- Wichtigstes Beispiel ist die Arbeit längs eines Wegs im Kraftfeld.

Raumkurve: Die Kurve wird durch eine Parameterdarstellung beschrieben, bei der die Koordinaten $x(t), y(t), z(t)$ von einem Parameter t abhängen.

Die Bahn eines Flugzeuges lässt sich bestimmen, wenn der Parameter t tatsächlich die Zeit ist.

Beispiel: Gerade zwischen zwei Punkten P1 und P2

$$P_1 = (0, 1, 1) \quad P_2 = (10, 10, 10)$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 10 - 0 \\ 10 - 1 \\ 10 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\vec{r}(t) = 10t\vec{e}_x + (1 + 9t)\vec{e}_y + (1 + 9t)\vec{e}_z$$

Beispiel: Kreis in der x,y-Ebene

$$\vec{r}(t) = R \cos t \vec{e}_x + R \sin t \vec{e}_y$$

Kurvenintegrale

Das vektorielle, differenzielle Wegelement:

-Für die meisten Kurvenintegrale wird das differenzielle Wegelement \vec{r}' oder $d\vec{r}$ benötigt.

-Es enthält die wichtige Information über die „Richtung“ der Kurve in einem bestimmten Punkt (Tangente)

-Beim Arbeitsintegral ist es wichtig zu wissen, wie der Weg zur Krafrichtung verläuft, in Krafrichtung ist die in diesem Punkt aufgewendete Teilarbeit dW größer als quer zur Krafrichtung.

-Das differenzielle Wegelement lässt sich durch Differenziation in die drei Koordinatenrichtungen ermitteln.

$$\vec{r}'(t) = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z$$

$$d\vec{r} = \left(\frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z \right) dt$$

$$P_1 = (0, 1, 1) \quad P_2 = (10, 10, 10)$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 10 - 0 \\ 10 - 1 \\ 10 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\vec{r}(t) = 10t \vec{e}_x + (1 + 9t) \vec{e}_y + (1 + 9t) \vec{e}_z$$

$$\vec{r}'(t) = 10 \vec{e}_x + 9 \vec{e}_y + 9 \vec{e}_z$$

$$\vec{r}(t) = R \cos t \vec{e}_x + R \sin t \vec{e}_y$$

$$\vec{r}'(t) = -R \sin t \vec{e}_x + R \cos t \vec{e}_y$$

Kurvenintegrale

Das skalare differenzielle Wegelement:

-In einigen Fällen ist die Richtung des differenziellen Wegelementes ohne Bedeutung.

-Das skalare differenzielle Wegelement entspricht dem Betrag des vektoriellen Elementes, bzw. der Wurzel aus dem Punktprodukt mit sich selbst.

$$r'(t) = |\vec{r}'(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

$$dr = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

$$\vec{r}(t) = 10t\vec{e}_x + (1 + 9t)\vec{e}_y + (1 + 9t)\vec{e}_z$$

$$\vec{r}'(t) = 10\vec{e}_x + 9\vec{e}_y + 9\vec{e}_z$$

$$dr = \sqrt{262}dt$$

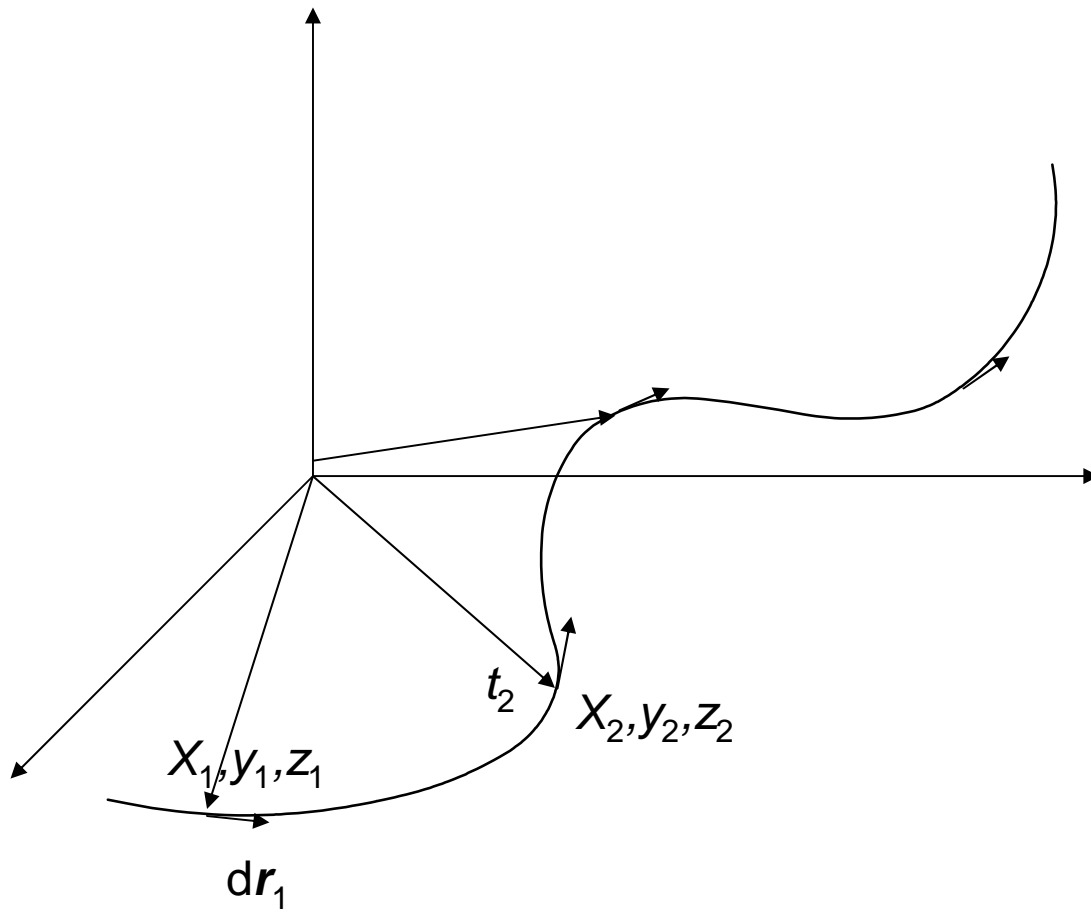
$$\vec{r}(t) = R \cos t \vec{e}_x + R \sin t \vec{e}_y$$

$$\vec{r}'(t) = -R \sin t \vec{e}_x + R \cos t \vec{e}_y$$

$$r'(t) = R$$

$$dr = R dt$$

Kurvenintegrale



Kurvenintegrale

Kurvenintegrale existieren in verschiedener Form:

1. Skalares Wegelement in skalarem Feld.
Vektorielltes Wegelement im Punktprodukt mit vektorielltem Feld (Arbeit im Kraftfeld, Potenzial)
2. Vektorielltes Wegelement im Punktprodukt mit vektorielltem Feld in geschlossenem Umlauf.
3. Vektorielltes Wegelement im Kreuzprodukt mit Differenzvektor (Biot-Savart'sches Gesetz)

Vorgehensweise:

-Darstellung des Weges in Parameterform

$$x(t), y(t), z(t)$$

-Bestimmung des Wertebereiches für t

-Bestimmung des differenziellen Wegelementes

-Substitution von x, y, z in der Feldfunktion durch t .

-Ausführung von Punkt- oder Kreuzprodukt, falls nötig

-Integration über t

Kurvenintegrale

Beispiele:

Kreisumfang

$$\vec{r}(t) = R \cos t \vec{e}_x + R \sin t \vec{e}_y \quad \text{Kreis in der } xy\text{-Ebene}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$d\vec{r} = (-R \sin t \vec{e}_x + R \cos t \vec{e}_y) dt \quad \text{vektorielles Wegelement}$$

$$dr = R dt \quad \text{skalares Wegelement}$$

$$F(x, y, z) = 1 \quad \text{konstante Feldfunktion}$$

$$L = \int_0^{2\pi} 1 R dt = 2\pi R \quad \text{Umfang eines Kreises}$$

Potenzial eines elektrischen Kugelfeldes

$$\vec{r}(t) = k t \vec{e}_x \quad 10 \leq t < \infty$$

$$d\vec{r} = k dt \vec{e}_x$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) \quad \text{Feldfunktion}$$

$$\vec{E}(t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon k^3 t^3} (t\vec{e}_x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon k^3 t^2} \vec{e}_x \quad \text{Auf der vorgegebenen Bahn}$$

$$\vec{E}(t) \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon k^2 t^2} dt$$

$$\varphi(10) = \varphi(\infty) - \int_{\infty}^{10} \frac{Q}{4\pi\epsilon k^2 t^2} dt \quad \varphi(\infty) = 0 \quad \text{Annahme}$$

$$\varphi(10) = \frac{Q}{4\pi\epsilon k^2 t} \Big|_{\infty}^{10}$$

Kurvenintegrale

Wichtige Schlussfolgerungen:

Alle folgenden Aussagen sind gleichwertig:

- Das Kurvenintegral längs einer Kurve C , die zwei Punkte verbindet, ist unabhängig vom Weg.
- Das Kurvenintegral längs einer geschlossenen Kurve ist Null.
- \mathbf{F} ist als Gradient einer skalaren Funktion φ darstellbar
- \mathbf{F} ist wirbelfrei

Oberflächenintegrale

$$G(x, y, z) = \iint_{(A)} \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{A} \quad \text{Vektorfeld über orientierte Fläche}$$

$$G(x, y, z) = \oiint \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{A} \quad \text{Vektorfeld über geschlossene Fläche}$$

$$G(x, y, z) = \iint_{(A)} F(x, y, z) dA \quad \text{Skalarfeld über skalare Fläche}$$

Anwendung:

-Bei Oberflächenintegralen wird der Felddurchsatz durch eine Fläche bestimmt.

-Wichtigstes Beispiel sind vektorielle Dichtegrößen wie D und J die eine Fläche durchsetzen.

Raumfläche: Die Fläche wird durch eine Parameterdarstellung beschrieben, bei der die Koordinaten $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ von den Parametern u und v abhängen. Die Fläche wird durch die Parameter u und v „abgescannt“.

-Beispiel: Rechteckige Fläche parallel zur yz -Ebene bei $x = 5$. Die y -Ausdehnung reicht von -10 bis $+10$, die z -Ausdehnung von -5 bis $+5$.

$$x = 5$$

$$y = u \quad -10 \leq u \leq 10$$

$$z = v \quad -5 \leq v \leq 5$$

Beispiel: Rechte Halbkugeloberfläche einer zentrischen Kugel mit dem Radius R .

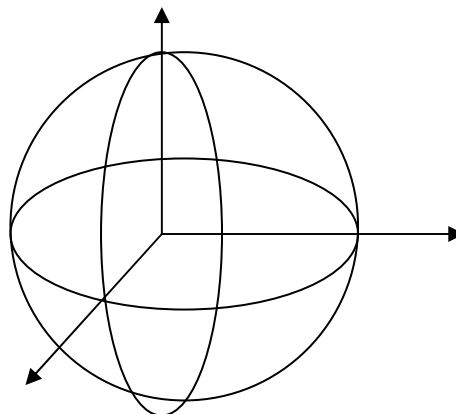
$$x = R \cos u \cos v$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$$

$$z = R \sin u \cos v$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$$

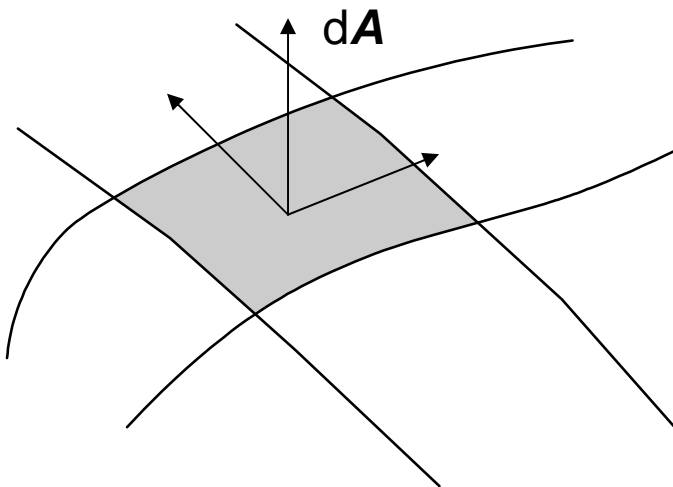
$$y = R \sin v$$



Oberflächenintegrale

Das vektorielle differenzielle Oberflächenelement:

- Für die meisten Oberflächenintegrale wird das differenzielle Oberflächenelement A' oder dA benötigt.
- Es enthält die wichtige Information über Größe und „Richtung“ des Flächenelementes an einem bestimmten Punkt der Oberfläche.
- Praktisch wird das Kreuzprodukt der beiden Richtungstangenten gebildet.



$$d\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Oberflächenintegrale

Das vektorielle differenzielle Oberflächenelement:

Für das Beispiel Ebene gilt dann:

$$x = 5$$

$$y = u \quad -10 \leq u \leq 10$$

$$z = v \quad -5 \leq v \leq 5$$

$$d\vec{A} = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} dudv = \vec{e}_x dudv$$

Das skalare Flächenelement:

$$dA = |d\vec{A}| = dudv$$

Die rechte Halbkugelfläche:

$$d\vec{A} = R^2 dudv \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \sin u \cos v & 0 & -\cos u \cos v \\ \cos u \sin v & -\cos v & \sin u \sin v \end{bmatrix} =$$

$$d\vec{A} = R^2 \cos v dudv (\cos u \cos v \vec{e}_x + \sin v \vec{e}_y + \sin u \cos v \vec{e}_z)$$

Das skalare Flächenelement:

$$dA = |d\vec{A}| = R^2 \cos v dudv$$

Oberflächenintegrale

Vorgehensweise:

- Darstellung des Flächenbereiches in Parameterform
 $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$
- Bestimmung der Wertebereiche für u, v
- Bestimmung des differentiellen Oberflächenelementes
- Substitution von x, y, z in der Feldfunktion durch u, v .
- Ausführung des Punkt- oder Kreuzprodukt, falls nötig
- Integration über u, v

Beispiel:

Die senkrechte Fläche wird von einem Stromdichtefeld nicht senkrecht durchsetzt

$$x = 5\text{cm}$$

$$y = u \quad -10\text{cm} \leq u \leq 10\text{cm}$$

$$z = v \quad -5\text{cm} \leq v \leq 5\text{cm}$$

$$d\vec{A} = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} dudv = \vec{e}_x dudv$$

Feldfunktion:

$$\vec{j} = J0 \frac{(\vec{e}_x + \vec{e}_y)}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{j} \cdot d\vec{A} = \frac{J0}{\sqrt{2}} dudv$$

$$I = \int_{(A)} \vec{j} \cdot d\vec{A} = \frac{J0}{\sqrt{2}} \iint dudv = \frac{J0}{\sqrt{2}} (20)(10)\text{cm}^2$$

Volumenintegrale

$$G = \iiint_{(V)} F dV$$

Anwendung:

-Bestimmung von integralen Größen wie Masse, Ladung aus Dichte- und Verteilungsgrößen wie Dichte, Raumladungsdichte.

-Bestimmte Integralsätze, die der Vereinfachung oder der Erklärung dienen.

Beschreibung des Volumens durch „scannen“ des Raumbereiches, die Koordinaten werden durch die Parameterform $x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)$ beschrieben.

Beispiel: Quader von $x=0$ bis $x = 5$.

Die y -Ausdehnung reicht von -10 bis $+10$, die z -Ausdehnung von -5 bis $+5$.

$$\begin{array}{ll} x = w & 0 \leq w \leq 5 \\ y = u & -10 \leq u \leq 10 \\ z = v & -5 \leq v \leq 5 \end{array}$$

Beispiel: Kugelvolumen mit Radius R

$$\begin{array}{ll} x = w \cos u \cos v & -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2} \\ z = w \sin u \cos v & -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2} \\ y = w \sin v & 0 \leq w \leq R \end{array}$$

Volumenintegrale

Das differenzielle Volumenelement:

-Wird benötigt zur Beschreibung des Volumens und Lösung des Integrals

$$dV = dudvdw = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

-Beispiel: Quader

$$dV = dudvdw = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} dudvdw = dudvdw$$

Integralsätze

Der Gaußsche Integralsatz:

$$\iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{F} dV = \iint_{(A)} \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

Der Stokesche Integralsatz:

$$\iint_{(A)} \operatorname{rot} \vec{F} d\vec{A} = \oint_{(C)} \vec{F} d\vec{r}$$