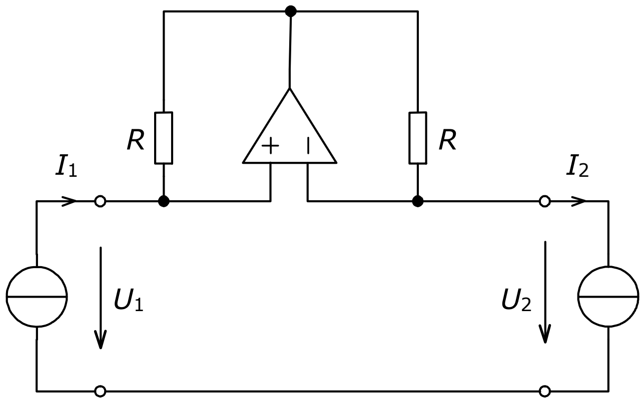
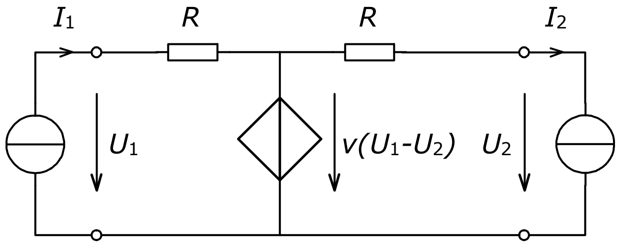
Negativ-Impedanz-Konverter

Schaltung mit OPV:



Das mathematische Modell des OPV lautet: $U_\mathrm{a} = v(U_+ - U_-)$, $\qquad I_+ = 0,\ I_- = 0$

Damit lässt sich die Schaltung wie folgt darstellen:



Für die Z-Matrix gilt unter Beachtung des Pfeilsystems:

$$Z_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{I_2=0}$$

$$U_1 = I_1 R + U_2 \quad U_2 = \frac{v}{1+v} U_1$$

$$U_1 = I_1 R + \frac{v}{1+v} U_1 \qquad U_1 - \frac{v}{1+v} U_1 = I_1 R \qquad U_1 \left[1 - \frac{v}{1+v}\right] = I_1 R$$

$$U_1 \left[\frac{1}{1+v}\right] = I_1 R$$

$$U_1 = I_1 R(1+v)$$

$$\underline{\underline{Z_{11} = R(1+v)}}$$

$$Z_{22} = \left.\frac{U_2}{I_2}\right|_{I_1=0} \qquad U_1 = vU_1 - vU_2 \qquad U_1 = \frac{v}{1-v} U_2$$

$$U_2 = U_1 - I_2 R = \frac{v}{1-v} U_2 - I_2 R$$

$$U_2 = I_2 R(1-v)$$

$$\underline{\underline{Z_{22} = R(1-v)}}$$

$$Z_{12} = \left.\frac{U_1}{I_2}\right|_{I_1=0} \qquad U_1 = vU_1 - vU_2 \qquad U_2 = \frac{(v-1)}{v} U_1$$

$$U_1 = U_2 - I_2 R = \frac{(v-1)}{v} U_1 - I_2 R \qquad U_1 = -vI_2 R$$

$$\underline{\underline{Z_{12} = -vR}}$$

$$Z_{21} = \left.\frac{U_2}{I_1}\right|_{I_2=0} \qquad U_2 = vU_1 - vU_2 \qquad U_1 = \frac{(v+1)}{v} U_2$$

$$U_2 = U_1 - I_1 R = \frac{(v+1)}{v} U_2 - I_1 R \qquad U_2 = vI_1 R$$

$$\underline{\underline{Z_{21} = vR}}$$

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} R(1+v) & -vR \\ vR & R(1-v) \end{bmatrix} \qquad v \to \infty \qquad \underline{Z} = \begin{bmatrix} \infty & -\infty \\ \infty & -\infty \end{bmatrix}$$

Die A-Matrix ergibt sich:

$$U_1 = A_{11}U_2 - A_{12}I_2$$
$$I_1 = A_{21}U_2 - A_{22}I_2$$
mit $\quad U_2 = R_2 I_2$
$$U_1 = A_{11}R_2 I_2 - A_{12}I_2$$
$$I_1 = A_{21}R_2 I_2 - A_{22}I_2$$
und $\quad R_\mathrm{e} = \frac{U_1}{I_1}$
$$R_\mathrm{e} = \frac{A_{11}R_2 - A_{12}}{A_{21}R_2 - A_{22}}$$

$$\Delta Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{21}Z_{12} = R^2(1-v^2) = R^2(1-v^2) + R^2v^2 = R^2$$

$$\underline{\underline{A_{11} = \frac{Z_{11}}{Z_{21}} = \frac{1+v}{v}}} \qquad \underline{\underline{A_{12} = \frac{\Delta Z}{Z_{21}} = \frac{R^2}{vR} = \frac{R}{v}}}$$
$$\underline{\underline{A_{21} = \frac{1}{Z_{21}} = \frac{1}{vR}}} \qquad \underline{\underline{A_{22} = \frac{Z_{22}}{Z_{21}} = \frac{R(1-v)}{vR} = \frac{(1-v)}{v}}}$$
$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \frac{1+v}{v} & \frac{R}{v} \\ \frac{1}{vR} & \frac{(1-v)}{v} \end{bmatrix}$$
für $\quad v \to \infty$
$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Der Eingangswiderstand ergibt sich:
$$R_\mathrm{e} = \frac{I_2R_2R_\mathrm{a}A_{11} + I_2A_{11}}{I_2R_2R_\mathrm{a}A_{21} + I_2A_{22}} = \frac{R_\mathrm{a} + 0}{0-1} = -R_\mathrm{a}$$
Der NIC transformiert einen positiven Widerstand in einen negativen. Der Strom am Eingang fließt also in die entgegen gesetzte Richtung!

Alternativ lässt sich die A-Matrix auch über die Definition ausrechnen:

$$A_{11} = \left.\frac{U_1}{U_2}\right|_{I_2=0} \qquad vU_1 = U_2 + vU_2$$

$$\underline{\underline{A_{11} = \frac{1+v}{v}}}$$

$$A_{12} = \left.\frac{U_1}{I_2}\right|_{U_2=0} \qquad I_2 = \frac{vU_1}{R}$$

$$\underline{\underline{A_{12} = \frac{R}{v}}}$$

$$A_{21} = \left.\frac{I_1}{U_2}\right|_{I_2=0} \qquad I_1 = \frac{U_1 - vU_1 + vU_2}{R} = U_1\frac{1-v}{R} + \frac{vU_2}{R}$$

$$\text{mit} \quad U_1 = U_2\frac{v+1}{v} \qquad I_1 = U_2\frac{(1-v)(1+v)}{R} + \frac{vU_2}{R}$$

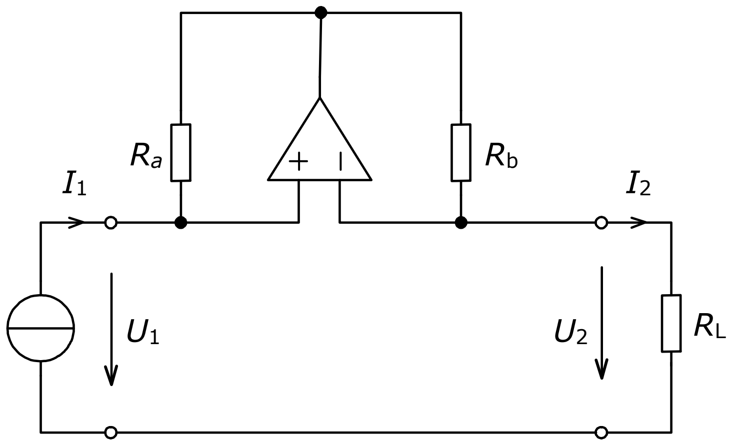
$$\underline{\underline{A_{21} = \frac{1}{Rv}}}$$

$$A_{22} = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{U_2=0} \qquad I_2 = \frac{vU_1}{R} \qquad I_1 = \frac{U_1}{R}(1-v)$$

$$\underline{\underline{A_{22} = \frac{1-v}{v}}}$$

Wir erhalten die gleichen Ergebnisse wie bei der $\underline{\boldsymbol{Z}}$-$\underline{\boldsymbol{A}}$-Transformation.

An einem weiteren Beispiel soll dieser Effekt noch einmal verdeutlicht werden. Wir haben die gleiche Schaltung, aber unterschiedliche Widerstände. Am Ausgang sei der Widerstand R_L angeschlossen. Zur Berechnung des Eingangswiderstandes werden nur Maschengleichungen und die Definitionen der Widerstände verwendet:



$U_1 = U_2$ (Gegenkopplung des OPV)

$R_\mathrm{L} = \dfrac{U_2}{I_2}$

$R_\mathrm{e} = \dfrac{U_1}{I_1}$ (Eingangswiderstand)

$$U_1 = I_1 R_a + I_2 R_b + U_2 = I_1 R_a + \frac{U_2}{R_\mathrm{L}} R_b + U_1$$

$$\underline{\underline{\frac{U_1}{I_1} = -\frac{R_a}{R_b} R_\mathrm{L} = R_\mathrm{e}}}$$

Der Lastwiderstand wird also mit dem Verhältnis $-\dfrac{R_a}{R_b}$ an den Eingang transformiert.

Nutzen:

- Ein negativer Widerstand kann einen positiven Widerstand in Reihenschaltung kompensieren. Auf diese Weise lassen sich z.B. Schwingkreise entdämpfen.
- Der negative Blindwiderstand eines Kondensators $-\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}$ wird in einen positiven Blindwiderstand transformiert. Auf diese Weise entsteht eine Induktivität mit dem Frequenzverhalten einer Kapazität.